Тема "Базис, размерност и координати" по Алгебра 1.

Камен Димитров Младенов, Група 6

05 Февруари 2022

По определение, базис е всяка линейно независима система вектори от ненулево линейно пространство, чиято линейна обвивка съвпада със самото пространство.

Също по определение, линейно пространство е крайно, когато е нулевото пространство или когато има краен базис.

Твърдим, че линейно пространство е крайномерно, тогава и само тогава когато е линейна обвивка на краен брой вектори. А ако пространството е и ненулево, то подмножество на образуващите линейната обвивка вектори може да бъде избрано за базис.

Доказателство: Разглеждаме произволно линейно пространство V над поле F. Ако $V = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$, то V е линейна обвивка на един вектор. Ако V има краен базис, то V е линейна обвивка на краен брой вектори. Нека $V = l(a_1, ..., a_n)$. Ако $a_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}\ \forall i \in \{1, ..., n\}$, то $V = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$.

Ако съществува $a_i \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$, нека след преномерация $a_1 \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Тогава a_1 е линейно независим и $l(a_1) \subseteq V$. Ако $l(a_1) = V$, то V е крайномерно, иначе $l(a_1) \subset V = l(a_1, a_2, ..., a_n)$ и съществува вектор (след преномерация) $a_2 \notin l(a_1)$. От лемата за линейна независимост, a_1, a_2 са линейно независими.

Аналогично, $l(a_1, a_2) \subseteq l(a_1, ..., a_n)$, ако $l(a_1, a_2) = l(a_1, ..., a_n)$, то V е крайно, иначе след преномерация намираме вектор $a_3 \notin l(a_1, a_2)$ и пак от лемата за линейна независимост, a_1, a_2, a_3 са линейно независими.

$a_1, ..., a_n$ са краен брой вектори, така че след като направим аналогични разсъждения краен брой пъти, ще намерим линейно независими вектори $a_1, ..., a_k, k \leq n$, за които $l(a_1, ..., a_k) = V$ и са базис на V. $\square$

Твърдим, че всеки два базиса на ненулево крайномерно пространство имат един и същ брой вектори.

Доказателство: Нека $a_1, ..., a_n$ и $b_1, ..., b_m$ са базиси на линейно пространство V над поле F. Съгласно основната лема на линейната алгебра върху $b_1, ..., b_m \in V = l(a_1, ..., a_n)$, следва че $m \leq n$. Аналогично от $a_1, ..., a_n \in V = l(b_1, ..., b_m)$ намираме, че $n \leq m$. Следователно, $m = n$. $\square$

По определение, броят на векторите във всеки един базис на ненулево крайномерно пространство V се нарича размерност на V и се бележи с $\dim V$. Ако пространството е нулевото пространство, то размерността е нула. Ако пространството не е крайномерно, размерността е безкрайност.

Твърдим, че за вектори $e_1, ..., e_n$ от линейно пространство V над поле F, свойства 1) и 2) са еквивалентни:

1) $e_1, ..., e_n$ е базис на V

2) всеки вектор $v \in V$ има единствено представяне като линейна комбинация на векторите $e_1, ..., e_n$ с коефициенти $x_1, ..., x_n \in F$: $v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$

Доказателство: 1) $\Rightarrow$ 2) По предположение, $V = l(e_1, ..., e_n)$. Допускаме противното, тоест че съществуват поне две различни представяния за произволен вектор $v \in V$: $x_1e_1 + ... + x_ne_n = v = y_1e_1 + ... + y_ne_n,\ \ x_i, y_i \in F, x_i \neq y_i\ \forall i \in \{1, ..., n\}$. То тогава $(x_1 - y_1)e_1 + ... + (x_n - y_n)e_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. $e_1, ..., e_n$ са линейно независими, следователно $x_i - y_i = 0 \quad x_i = y_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$, противоречие!

2) $\Rightarrow$ 1) От предположение, следва че $x_1e_1 + ... + x_ne_n = \overrightarrow{\mathcal{O}} = 0e_1 + ... + 0e_n \Rightarrow x_1 = ... = x_n = 0$. Тоест $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ има единствено представяне с нулеви коефициенти и следователно $e_1, ..., e_n$ са линейно независими и базис. $\square$

Твърдим, че за ненулево линейно пространство V над поле F, $\dim V = n$ тогава и само тогава, когато съществуват n линейно независими вектора във V и произволни $n+1$ вектора са линейно зависими.

Доказателство: ($\Rightarrow$) Нека $\dim V = n$ и $e_1, ..., e_n \in V$ са базис на V. То тогава, от лемата за линейната независимост, произволни $n+1$ вектора $a_1, ..., a_{n+1} \in V = l(e_1, ..., e_n)$ са линейно зависими.

($\Leftarrow$) Нека $a_1, ..., a_n \in V$ са линейно независими вектори и всички произволни $n+1$ на брой вектора са линейно зависими. Ще докажем, че $a_1, ..., a_n$ са базис на V и $\dim V = n$. Допускаме противното, тоест че $l(a_1, ..., a_n) \subset V$. Тогава от лемата за линейна независимост, съществува $a_{n+1} \in V \setminus l(a_1, ..., a_n)$, такъв че $a_1, ..., a_{n+1}$ са линейно независими. Обаче, всеки $n+1$ на брой вектора са линейно зависими, противоречие! $\square$

Твърдим, че за ненулево линейно пространство V над поле F, $\dim V = \infty$ тогава и само тогава, когато съществуват n на брой линейно независими вектора от V за всяко естествено n.

Доказателство: ($\Rightarrow$) Допускаме противното, тоест $\dim V = \infty$ и за произволно n съществуват произволни линейно зависими вектори $b_1, .., b_n \in V$. Понеже V е ненулево, то със сигурност има поне един линейно независим вектор и $n \geq 2$. Ако n е минималното естествено число с това свойство, то съществуват $n-1$ линейно независими вектори. Съгласно миналото твърдение, следва че $\dim V = n-1$, противоречие!

($\Leftarrow$) Допускаме противното, тоест за всяко естествено число n съществуват n на брой линейно независими вектора от V и $\dim V \neq \infty$. Понеже V е ненулево, то $\dim V = m$ за някое естествено m, тогава от миналото твърдение, произволни $m+1$ вектора са линейно зависими, противоречие! $\square$

Твърдим, че за вектори $a_1, ..., a_n$ от n-мерно линейно независимо пространство V над поле F, условия $1), 2)$ и $3)$ са еквивалентни:

1) $a_1, ..., a_n$ са линейно независими 2) $l(a_1, ..., a_n) = V$ 3) $a_1, ..., a_n$ е базис на V

Доказателство: 3) $\Rightarrow$ 1) и 2) Изпълнено по определение за базис

1) $\Rightarrow$ 2) и 3) Допускаме противното, тоест $l(a_1, ..., a_n) \subset V$. Тогава по теоремата за линейна независимост, съществува вектор $a_{n+1} \in V \setminus l(a_1, ..., a_n)$ така че $a_1, ..., a_{n+1}$ са линейно независими. Обаче, от предишно твъдение знаем, че произволни $n+1$ вектора от n-мерно пространство са линейно зависими, противоречие!

2) $\Rightarrow$ 1) и 3) Допускаме противното, тоест съществува $a_i \in l(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$. Тогава $l(a_1, ..., a_i, ..., a_n) \subseteq l(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$, но също $l(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n) \subseteq l(a_1, ..., a_i, ..., a_n)$. Следователно, $V = l(a_1, ..., a_n) = l(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$, тоест базисът на V може да бъде съставен от най-много $n-1$ вектора, противоречие с n-размерността на V! $\square$

Твърдим, че в n-мерно линейно пространство V над поле F, линейно независимите вектори $a_1, ..., a_k$, $k \leq n$ могат да се допълнят до базис $a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n$ на V.

Доказателство: Ако $k = n$, то $a_1, ..., a_k$ са базис на V (от предишно твърдение, "$a_1, ..., a_n$ са линейно независими" е еквивалентно на "$a_1, ..., a_n$ е базис на V").

Ако $k < n$, то избираме вектор $b_{k+1} \in V \setminus l(a_1, ..., a_k)$. От основната лема на линейната алгебра, $a_1, ..., a_{k+1}$ са линейно независими вектори. Ако $k+1 = n$, то те са базис на V, иначе правим ананлогични разсъждения за a_{k+2} и $a_1, ..., a_{k+2}$. След краен брой аналогични стъпки, получаваме n на брой линейно независими вектора $a_1, ..., a_n$, които са базис на V (съгласно случая $k = n$). $\square$

Тема "Матрица на линейно изображение на крайномерни пространства. Смяна на базиса. Трансформация на матрицата на линейно изображение при смяна на базиса. Подобни матрици." по Алгебра 1.

Камен Димитров Младенов, Група 6

05 Февруари 2022

Твърдим, че за линейно изображение $\varphi : U \to V$, наредена m-торка $u = (u_1, ..., u_m), u_1, ..., u_m \in U$ и матрицата $A = (a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \in M_{m\times n}(F)$: $\quad \varphi(uA) = \varphi(u)A, \quad$ където

$$uA := (v_1, ..., v_n), \qquad v_j := (u_1, u_2, ..., u_m)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i,$$

$$\varphi(uA) = \varphi(v_1, ..., v_n) := (\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n)) \quad \text{и} \quad \varphi(u) := (\varphi(u_1), ..., \varphi(u_m))$$

Доказателство: Забелязваме, че

$$\varphi(v_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_j\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\varphi(u_i) = (\varphi(u_1), ..., \varphi(u_m))\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$\square$

По определение, за линейно изображение на крайномерни пространства над поле F $\varphi : U \to V$, базис $e = (e_1, ..., e_n)$ на U и базис $f = (f_1, ..., f_n)$ на V, матрицата $A = (\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)) \in M_{m\times n}(F)$ се нарича матрица на φ спрямо базиса e и f. Еквивалентно $\varphi(e) = fA$ за $\varphi(e) := (\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n))$.

Твърдим, че за линейно пространство U над поле F, с линейно независими вектори $u_1, ..., u_m$, $u = (u_1, ..., u_m)$ и матрици $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}, B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_{m\times n}(F)$:

1) $uA = \underbrace{(\overrightarrow{\mathcal{O}}, ..., \overrightarrow{\mathcal{O}})}_{n} \implies A = \mathcal{O}_{m\times n}$ $\qquad$ 2) $uA = uB \implies A = B$

(Матрична форма на линейната независимост на вектори)

Доказателство: 1) След сравняването на j-тите компоненти ($j \in \{1, ..., n\}$) от двете страни, стигаме до:

$$\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathcal{O}} \qquad \sum_{s=1}^{m} a_{s,j}u_s = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

Обаче, понеже $u_1, ..., u_m$ са линейно независими, то $a_{s,j} = 0 \; \forall s \in \{1, ..., m\}$. Следователно $A = \mathcal{O}_{m\times n}$

2) Щом $uA = uB$, то $u(A - B) = uA - uB = \underbrace{(\overrightarrow{\mathcal{O}}, ..., \overrightarrow{\mathcal{O}})}_{n} \implies A - B = \mathcal{O}_{m\times n} \implies A = B$. $\square$

По определение, за n-мерно пространство U с базис $e = (e_1, ..., e_n)$ и линеен оператор $\varphi : U \to U$, матрицата $A = (\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)) \in M_{n\times n}(F)$ се нарича матрица на φ спрямо базиса e. Еквивалентно, $\varphi(e) = eA$.

По определение, за линейно пространство V над поле F с базиси $e = (e_1, ..., e_n)$ и $f = (f_1, ..., f_n)$,

$$\text{матрицата } T = (f_1, ..., f_j, ..., f_n) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1j} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2j} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nj} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(F),$$

$$\text{където } f_1 = (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix}, ..., f_n = (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{pmatrix} \in V$$

наричаме матрица на прехода от базиса e към базиса f. Еквивалентно, $f = (f_1, ..., f_n) = (e_1, ..., e_n)T = eT$.

Твърдим, че за линейно пространство V над поле F с базис $e = (e_1, ..., e_n)$ и за матрица $T \in M_{n\times n}(F)$, T е матрица на прехода от базиса e към базиса $f = (f_1, ..., f_n) = eT \iff T$ е неособена.

Доказателство: ($\Rightarrow$) Щом $f = eT$ е базис на V, то съществува матрица на прехода $S \in M_{n\times n}(F)$, за която $e = fS$. Тогава $eE_n = e = fS = (eT)S = e(TS) \implies E_n = TS$ (Лемата за матрична форма на линейната независимост на вектори). Следователно T е обратима и от там неособена матрица.

($\Leftarrow$) Ако $\det(T) \neq 0$, то вектор-стълбовете на T са линейно независими (предишно твърдение). Следователно векторите $f_1, ..., f_n$, образуващи вектор-стълбовете на T с координати спрямо базиса $e_1, ..., e_n$, образуват базис на V (твърдение от миналата тема). $\square$

Твърдим, че за линейно пространство V с базиси $e = (e_1, ..., e_n)$ и $f = (f_1, ..., f_n)$, матрица на прехода $T \in M_{n\times n}(F)$ от e към f и произволен вектор $v \in V$ с координати $x, y \in M_{n\times 1}(F)$ съответно спрямо двата базиса, е изпълнено равенството $x = Ty$.

Доказателство: Щом $f = eT$ и $ex = v = fy$, то $ex = fy = (eT)y = e(Ty) \implies x = Ty$ (Лемата за матрична форма на линейната независимост на вектори). $\square$

Твърдим, че за линейно пространство U с базиси $e = (e_1, ..., e_n)$ и $e' = eT$ (с матрица на прехода T), линейно пространство V с базиси $f = (f_1, ..., f_n)$ и $f' = fS$ (с матрица на прехода S) и линейно изображение $\varphi : U \to V$ с матрица A спрямо базисите e и f, матрицата B на φ спрямо базисите e' и f' изпълнява равенството $B = S^{-1}AT$.

Доказателство: По определение, $\varphi(e) = fA$ и $\varphi(e') = f'B$, заместваме с $e' = eT$ и $f' = fS$ (определение на матрица на прехода между два базиса). След прилагане на лемата за матричен запис на линейността на изображение и използване на асоциативността на умножението на матрици, стигаме до $f(AT) = (fA)T = \varphi(e)T = \varphi(eT) = \varphi(e') = f'B = (fS)B = f(SB)$. От лемата за матрична форма на линейната независимост на вектори, $AT = SB$ и от минало твърдение, матрицата на прехода S е обратима и $B = S^{-1}AT$. $\square$

По определение, квадратни матрици $A, B \in M_{n\times n}(F)$ с един и същ размер са подобни, ако съществува обратима матрица $T \in M_{n\times n}(F)$, за която $B = T^{-1}AT$.

Твърдим, че за n-мерно линейно пространство V над полето F, квадратните матрици $A, B \in M_{n\times n}(F)$ са подобни $\iff$ съществува линеен оператор с тези матрици спрямо подходящи базиси.

Доказателство: ($\Leftarrow$) От предишното твърдение, за линеен оператор $\varphi : V \to V$ с матрица A спрямо базис e, матрицата на φ спрямо базис $e' = eT$ ще бъде $B = T^{-1}AT$ и следователно A и B са подобни.

($\Rightarrow$) Нека $B = T^{-1}AT$, $e = (e_1, ..., e_n)$ да бъде базис на V и $\varphi : V \to V$ е линеен оператор с матрица A спрямо базиса e. е неособена, следователно $e' = eT$ е базис на V (минало твърдение). То тогава, матрицата на φ спрямо базиса e' е $T^{-1}AT = B$ (минало твърдение). $\square$

Тема "Собствени вектори и инвариантни подпространства на линеен оператор." по Алгебра 1.

Камен Димитров Младенов, Група 6

05 Февруари 2022

По определение, за квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ от ред n, характеристичният и полином е

$$f_A(x) = \det(A - xE_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})x^{n-1} + ... + \det(A)$$

Също по определение, корените на $f_A(x) = 0$ се наричат характеристични корени на A.

Твърдим, че матрици $A \in M_{n\times n}(F)$ и $B = T^{-1}AT \in M_{n\times n}(F)$ са подобни, ако характеристичните им полиноми съвпадат.

Доказателство: Понеже $xE_n = x(T^{-1}E_nT) = T^{-1}(xE_n)T$, то $f_B(x) = \det(B - xE_n) =$
$= \det\left(T^{-1}AT - T^{-1}(xE_n)T\right) = \det\left(T^{-1}(A - xE_n)T\right) = \det(T^{-1})\det(A - xE_n)\det(T) =$
$= \det(T^{-1}T)f_A(x) = f_A(x)$. □

По определение, за линеен оператор $\varphi : V \to V$, собствен вектор е вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ за който $\varphi(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$. λ е собствена стойност на φ (отговаряща на собствения вектор v).

Твърдим, че собствените стойности на линеен оператор в крайномерно пространство съвпадат с характеристичните корени на оператора.

Доказателство: Разглеждаме линейно пространство V над поле F с базис $e = (e_1, ..., e_n)$ и линеен оператор $\varphi : V \to V$ с матрица $A \in M_{n\times n}(F)$. За произволен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ с координати $x \in M_{n\times 1}(F) \setminus \{\mathcal{O}_{n\times 1}\}$ спрямо базиса e, е изпълнено $\varphi(v) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = (eA)x = e(Ax)$ (матрична форма на линейността на изображение и определение за матрица на линеен оператор). То тогава, v е собствен вектор на φ със собствена стойност $\lambda \iff e(Ax) = \varphi(v) = \lambda v = \lambda(ex) = e(\lambda x)$ (свойства на умножение на матрици със скалар). Това е еквивалентно на $Ax = \lambda x = \lambda(E_nx) = (\lambda E_n)x$ и е в сила точно когато $(A - \lambda E_n)x = Ax - (\lambda E_n)x = \mathcal{O}_{n\times 1}$ има ненулево решение за x. Това е равносилно на $0 = \det(A - \lambda E_n) = f_A(\lambda)$. Тоест λ е собствена стойност $\iff$ λ е характеристичен корен. □

Твърдим, че за линейно пространство V, системата вектори, отговарящи на независимите собствени стойности на линеен оператор, е линейно независима.

Доказателство: Ще го докажем с индукция по броя n на собствените стойности $\lambda_1, ..., \lambda_n$ на линеен оператор $\varphi : V \to V$.

База: Няма какво да се доказва

Индукционна стъпка: Разглеждаме $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}v_{i,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. От $\varphi(v_{i,j}) = \lambda_i v_{i,j}$ и $\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_V) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, получаваме $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}\lambda_i v_{i,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. Умножаваме първоначалното разглеждано по $-\lambda_n$ и прибавяме към второто: $\overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n)v_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n)v_{i,j}$. От Индукционно предположение, $\{v_{i,j} \mid 1 \le i \le n-1, 1 \le j \le k_i\}$ е линейно независима, тоест $\mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) = 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n-1\}, j \in \{1, ..., k_i\}$. Имайки се предвид, че за $\forall i \in \{1, ..., n-1\}, j \in \{1, ..., k_i\}$: $\lambda_i - \lambda_n \ne 0$, то $\mu_{i,j} = 0$. Тогава

$\sum_{j=1}^{k_n} \mu_{n,j} v_{n,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. От линейната независимост на $v_{n,1}, ..., v_{n,k_n}$, то $\mu_{n,j} = 0 \; \forall j \in \{1, ..., k_n\}$. $\square$

По определение, спектърът на матрица е множеството от характеристични корени на матрицата. Тя има просто спектър, ако има толкова характеристични корена, колко е размера и.

Също по определение, спектърът на линеен оператор в n-мерно пространство е множеството на характеристичните му корени. Линейният оператор има прост спектър, ако има точно n на брой характеристични корени.

Твърдим, че за линеен оператор с прост спектър съществува базис в който матрицата на оператора е диагонална. Еквивалентно съществува базис съставен от собствени вектори.

Доказателство: Разглеждаме пространство V над поле F с линеен оператор $\varphi : V \to V$ и n различни характеристични корена $\lambda_1, ..., \lambda_n \in F$. От минало твърдение, следва че $\lambda_1, ..., \lambda_n$ са собствени стойности. Съответстващите на тях собствени вектори $v_1, ..., v_n$ са линейно независими (миналото твърдение) и са базис на V (твърдение). Имайки предвид, че $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{i-1} + \lambda_i v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_n \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$, матрицата на φ в базиса $v_1, ..., v_n$ е диагонална (и диагоналните елементи са равни на собствените стойности). $\square$

Твърдим, че за матрица $A \in M_{n \times n}(F)$ с прост спектър, съществува $T \in M_{n \times n}(F)$, такава че $D = T^{-1}AT$ е дагонална.

Доказателство: Разглеждаме пространство V над поле F с базис $e = (e_1, ..., e_n)$ и линеен оператор $\varphi : V \to V$ с матрица A спрямо базиса e. Тогава φ има прост спектър и от миналата теорема, съществува базис $v = (v_1, ..., v_n)$ в който матрицата на φ е диагонална. Матрицата на прехода T от базиса e към базиса v е обратима и $T^{-1}AT$ е диагонална. $\square$

По определение, за пространство V, нейно подпространство W е инвариантно относно линеен оператор $\varphi : V \to V$, ако $\varphi(W) \subseteq W$.

Твърдим, че за линейно пространство V над поле F и линеен оператор $\varphi : V \to V$, множеството $U_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ е φ-инвариантно подпространство на V. Ако λ е собствена стойност, то U_λ е обединението на собствените вектори (отговарящи на λ). Иначе, ако λ не е собствена стойност, то $U_\lambda = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$.

Доказателство: U_λ е подпространство на V, защото за произволни $u_1, u_2 \in U_\lambda,\ \mu \in F$ е изпълнено $u_1 + u_2, \mu u_1 \in U_\lambda$ от $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 = \lambda(u_1 + u_2)$ и $\varphi(\mu u_1) = \mu\varphi(u_1) = \mu(\lambda u_1) = (\mu\lambda)u_1 = (\lambda\mu)u_1 = \lambda(\mu u_1)$. За произволен вектор е изпълнено $\varphi(u) = \lambda u \in U_\lambda$, следователно U_λ е φ-инвариантно. $\square$

Твърдим, че за линейно пространство V и линеен оператор $\varphi : V \to V$, неин ненулев вектор v поражда 1-мерно φ-инвариантно подпространство $l(v)$ на V тогава и само тогава, когато v е собствен вектор на φ.

Доказателство: ($\Rightarrow$) Ненулевият вектор v се изобразява в $\varphi(v) \in l(v)$, така че $\varphi(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$ и следователно v е собствен вектор (отговарящ на λ).

($\Leftarrow$) Произволен вектор $\mu v \in l(v)$ се изобразява в $\varphi(\mu v) = \mu\varphi(v) = \mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v \in l(v)$ и 1-мерното пространство на $l(v)$ е φ-инвариантно. $\square$

Без доказателство, твърдим че за непостоянен полином $f(x) \in \mathbb{C}[x] \backslash \mathbb{C}$, всички корени са комплексни числа. (Основна Теорема на алгебрата)

Тема "Евклидови и унитарни пространства. Ортогонализация по метода на Грам-Шмид." по Алгебра 1.

Камен Димитров Младенов, Група 6

05 Февруари 2022

По определение, за линейно пространство V над поле $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$, скаларно произведение е изображение $\langle , \rangle : V \times V \to F$ със свойствата $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ $\forall u, v \in V$, $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ $\forall u_1, u_2, v \in V$, $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in F$ и $\langle u, v \rangle = 0 \in F$, $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ $\forall v \in V$ точно когато $v = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \in V$.

По определение, линейно пространство над полето на реалните числа със скаларно произведение се нарича евклидово. Също, линейно пространство над полето на комплексните числа със скаларно произведение се нарича унитарно.

Твърдим, че за евклидово или унитарно пространство V над поле F, следните свойства са в сила:

1) $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle \quad \forall u, v_1, v_2 \in V$ 2) $\langle u, \lambda u \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V, \ \forall \lambda \in F$

3) $\langle \overrightarrow{\mathcal{O}}_V, v \rangle = \langle v, \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \rangle = 0 \quad \forall v \in V, \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \in V$

4) $\left\langle \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j v_j \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} \langle u_i, v_j \rangle \quad \forall u_i, u_j \in V, \ \forall \lambda_i, \mu_j \in F$

Доказателство: 1) $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \overline{\langle v_1 + v_2, u \rangle} = \overline{\langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle} = \overline{\langle v_1, u \rangle} + \overline{\langle v_2, u \rangle} = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$ за произволни $u, v_1, v_2 \in V$

2) $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, u \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \, \overline{\langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$ за произволни $u, v \in V, \lambda \in F$

3) За произволен вектор $u \in V$ е в сила $0u = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, следователно $\langle \overrightarrow{\mathcal{O}}_V, v \rangle = \langle 0u, v \rangle = 0 \langle u, v \rangle = 0$ и тогава $\langle v, \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \rangle = \langle v, 0u \rangle = \overline{0} \langle v, u \rangle = 0 \langle v, u \rangle = 0$.

4) От свойствата в определението за скаларно произведение и от вече доказаните свойства,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \right\rangle = \left\langle \lambda_1 u_1, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \right\rangle + \cdots + \left\langle \lambda_m u_m, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \right\rangle = \\
&= \langle \lambda_1 u_1, \mu_1 v_1 \rangle + \cdots + \langle \lambda_1 u_1, \mu_n v_n \rangle + \langle \lambda_2 u_2, \mu_1 v_1 \rangle + \cdots + \langle \lambda_m u_m, \mu_n v_n \rangle = \\
&= \lambda_1 \overline{\mu_1} \langle u_1, v_1 \rangle + \cdots + \lambda_1 \overline{\mu_n} \langle u_1, v_n \rangle + \lambda_2 \overline{\mu_1} \langle u_2, v_1 \rangle + \cdots + \lambda_m \overline{\mu_n} \langle u_m, v_n \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} \langle u_i, v_j \rangle
\end{aligned}
$$

□

По определение, за евклидово или унитарно пространство V, негови вектори $v_1, ..., v_n$ се наричат ортогонални ако $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j$.

Твърдим, че за евклидово или унитарно пространство, произволни ненулеви ортогонални вектори са линейно независими.

Доказателство: Нека пространството да е V над поле $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$, $v_1, ..., v_n$ са произволните ненулеви ортогонални вектори и $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_n v_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V, \lambda_1, ..., \lambda_n \in F$. $\langle \overrightarrow{\mathcal{O}}_V, v_i \rangle = 0$ от вече доказано свойство и $\langle \overrightarrow{\mathcal{O}}_V, v_i \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_n v_n, v_i \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$ (понеже от дефиницията за ортогонални вектори $\langle v_j, v_i \rangle = 0 \ \forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j$). $\langle v_i, v_i \rangle = ||v_i||^2 > 0$, то $\lambda_i = 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$ и $v_1, ..., v_n$ са линейно независими. □

По определение, за евклидово или унитарно пространство V и за негов вектор v, дължина на v се нарича $||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}^{\geq 0} \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \langle v, \quad v \rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

По определение, за евклидово или унитарно пространство V, негови вектори $v_1, ..., v_n$ се наричат ортонормирани, ако са ортогонални и $||v_i|| = 1, \ \forall i \in \{1, ..., n\}$.

Твърдим, че за евклидово или унитарно пространство V над поле F, базисът му $e = (e_1, ..., e_n)$ е ортонормиран тогава и само тогава, когато $\langle ex, ey \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x^t \overline{y}$ за произволни $ex, ey \in V$ с координати $x, y \in M_{n\times 1}(F)$.

Доказателство: ($\Rightarrow$) Щом базиса е ортонормиран, то $\langle ex, ey \rangle = \left\langle \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} u_j e_j \right\rangle =$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_i} \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}, \text{ където } \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ за } 1 \le i \neq j \le n \\ 1 \text{ за } 1 \le i = j \le n \end{cases}$$

($\Leftarrow$) От предположението, следва че

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0\cdot 0 + \cdots + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + \cdots + 0\cdot 0 \\ + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + \cdots + 0\cdot 0 = 0 \end{matrix}$$

и $\langle ej, e_i \rangle = \overline{\langle ei, e_j \rangle} = \overline{0} = 0$. Следователно базисът е ортонормиран. $\square$

Твърдим, че съществува алгоритъм (ортогонализация по метода Грам-Шмид), който при евклидово или унитарно пространство V над F, за линейно независими вектори $a_1, ..., a_n \in V$ построява ортогонални вектори $b_1, ..., b_n : l(a_1, ..., a_i) = l(b_1, ..., b_i) \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$. Също $b_m = a_m \quad \forall a_m$ ортогонален.

Доказателство: Ще го докажем с индукция по i.

База: $n = 1$ Избираме $b_1 = a_1$.

Индукционна стъпка: Нека $a_1, ..., a_i \in V$ да са линейно независими. То тогава $a_1, ..., a_{n-1}$ също са линейно независими и по Индукционно предположение съществуват ненулеви $b_1, ..., b_{i-1} \in V$: $l(a_1, ..., a_{i-1}) = l(b_1, ..., b_{i-1})$. Търсим $b_i = a_i + \sum\limits_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} b_j$, където b_i е ортогонален на $b_1, ..., b_{i-1}$. Тогава трябва да е изпълнено $0 = \langle b_i, b_j \rangle = \langle a_i, b_j \rangle + \langle \lambda_{i,j} b_j, b_j \rangle = \langle a_i, b_j \rangle + \lambda_{i,j} \langle b_j, b_j \rangle \quad \forall j \in \{1, ..., i-1\}$. Допускаме, че $b_j \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$ и избираме $\lambda_{i,j} = -\frac{\langle a_i, b_j \rangle}{\langle b_j, b_j \rangle}$ (скаларните квадрати са неотрицателни) и $b_1, ..., b_i$ са ортогонални.

Ако допуснем, че $b_j = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, то $a_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} (-\lambda_{i,j}) b_j \in l(b_1, ..., b_{i-1}) = l(a_1, ..., a_{i-1})$, противоречи на линейната независимост на $a_1, ..., a_i$.

Проверяваме, че $l(a_1, .., a_i) = l(b_1, ..., b_i)$: $l(a_1, ..., a_i) = l(a_1, ..., a_{i-1}) + l(a_i) = l(b_1, ..., b_{i-1}) + l(a_i) = l(b_1, ..., b_{i-1}, a_i)$. Забелязваме, че $b_i \in l(b_1, .., b_{i-1}, a_1)$ и $a_i = b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} b_j \in l(b_1, .., b_i)$. Ако $a_1, .., a_i$ са ортогонални, то и $a_1, ..., a_{i-1}$ също са ортогонални и от Индукционно предположение $b_m = a_m \quad \forall m \in \{1, ..., i-1\}$. Тогава за търсеното b_i получаваме $\lambda_{i,j} = -\frac{\langle a_i, b_j \rangle}{\langle b_j, b_j \rangle} = -\frac{\langle a_i, a_j \rangle}{\langle a_j, a_j \rangle} = 0$, от където $b_i = a_i$. $\square$

Твърдим, че за евклидово или унитарно пространство V над поле F, с линейно независими вектори $a_1, ..., a_n$ и вектор $a_{n+1} \in l(a_1, ..., a_n)$, прилагането на ортогонализация по метода на Грам-Шмид върху $a_1, ..., a_{n+1}$ връща $b_{n+1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$.

Доказателство: От ортогонализация по метода на Грам-Шмид върху $a_1, ..., a_n$ получаваме ненулеви ортогонални вектори $b_1, ..., b_n$, за които $l(a_1, ..., a_n) = l(b_1, ..., b_n)$. Търсим $b_{n+1} = a_{n+1} + \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{n+1,j} b_j$. Понеже $a_{n+1} \in l(a_1, ..., a_n) = l(b_1, ..., b_n)$, то съществуват $\mu_j \in F$, такива че $a_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j b_j$. Тоест

$b_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j b_j + \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{n+1,j} b_j = \sum\limits_{j=1}^{n} (\mu_j + \lambda_{n+1,j}) b_j$. От ортогоналността на $b_{n+1} \implies 0 = \langle b_{n+1}, b_j \rangle = (\mu_j + \lambda_{n+1,j}) \langle b_j, b_j \rangle$. Следователно $\mu_j + \lambda_{n+1} = 0 \quad \forall j \in \{1, ..., n\}$ и $b_{n+1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. □

Твърдим, че за n-мерно евклидово или унитарно пространство V с ортонормирана система вектри $e_1, ..., e_k$, ако $k \leq n$, то $e_1, ..., e_k$ може да се допълни до ортонормиран базис $e_1, ..., e_k, ..., e_n$.

Доказателство: $e_1, ..., e_k$ са линейно независими (лема) и можем да ги допълним до базис $e_1, ..., a_{k+1}, ..., a_k$ (твърдение). От ортогонализация по метода на Грам-Шмид върху този базис получаваме ортогонални вектори $b_1, ..., b_n$, за които $b_j = e_j \quad \forall j \in \{1, ..., k\}$, които също са базис (теорема). Полагаме $||b_i|| := \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle}^{\geq 0}, e_i := \frac{b_i}{||b_i||} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$ и получената система вектори $e_1, ..., e_n$ е линейно независима (лема) и ортонормиран базис (теорема). □

Тема "Симетрични и ермитови матрици и оператори." по Алгебра 1.

Камен Димитров Младенов, Група 6

05 Февруари 2022

По определение, матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ е симетрична ако $\overline{A}^t = A$. Също, матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ е ермитова ако $\overline{A}^t = A$.

Твърдим, че множествата $M^{sym}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$ и $M^{Herm}_{n\times n}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid \overline{A}^t = A\}$ са линейни пространства над полето на реалните числа.

Доказателство: За произволни $M, N \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$: $\overline{(M+N)}_{i,j} = \overline{(M+N)_{i,j}} = \overline{(M_{i,j} + N_{i,j})} = \overline{M_{i,j}} + \overline{N_{i,j}} = \overline{(M)}_{i,j} + \overline{(N)}_{i,j} = (\overline{M} + \overline{N})_{i,j} \quad \forall i \in \{1, ..., m\}, \forall j \in \{1, ..., n\}$ (защото $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ за произволни $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$). □

За произволни $M \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ и $z \in \mathbb{C}$: $\overline{(zM)}_{i,j} = \overline{(zM)_{i,j}} = \overline{(zM_{i,j})} = \overline{z} \cdot \overline{(M_{i,j})} = \overline{z} \cdot \overline{(M)}_{i,j} = (\overline{z} \cdot \overline{M})_{i,j} \quad \forall i \in \{1, ..., m\}, \forall j \in \{1, ..., n\}$ (защото $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ за произволни $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$).

Следователно, ако $\overline{A}^t = A$ и $\overline{B}^t = B$, то $\overline{(A+B)}^t = \overline{A}^t + \overline{B}^t = A + B$ и за произволно $\lambda \in \mathbb{R}$ $\overline{(\lambda A)}^t = \overline{\lambda} \cdot \overline{A}^t = \lambda A$. То тогава $A + B$ и λA са симетрични/ермитови матрици и множеството на симетричните/ермитовите матрици е линейно пространство над $\mathbb{R}$. □

Твърдим, че за обратима симетрична/ермитова матрица, обратната ѝ матрица също е симетрична/ермитова.

Доказателство: По определение, $AA^{-1} = E_n$, то тогава $E_n = \overline{E_n}^t = \overline{(AA^{-1})}^t = (\overline{A} \cdot \overline{A^{-1}})^t = \overline{A^{-1}}^t \cdot \overline{A}^t = \overline{A^{-1}}^t \cdot A$ (показахме в доказателството на миналата теорема, че $\overline{MN} = \overline{M} \cdot \overline{N}, \quad M, N \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$). Имайки предвид, че $Z = A^{-1}$ е единственото решение на $ZA = E_n$ (по определение), то $\overline{A^{-1}}^t = A^{-1}$ и A^{-1} е обратима. □

Твърдим, че за симетрични $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ или ермитови $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ матрици, при които $AB = BA$, AB е симетрична/ермитова матрица.

Доказателство: $\overline{(AB)}^t = (\overline{A} \cdot \overline{B})^t = \overline{B}^t \cdot \overline{A}^t = BA = AB$ □

По определение, за евклидово (или унитарно) пространство V, линеен оператор $\varphi : V \to V$ се нарича симетричен (или ермитов) ако $\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle$, $\forall u, v \in V$.

Твърдим, че за n-мерно евклидово или унитарно пространство V над поле F с линеен оператор $\varphi : V \to V$, следните условия са еквивалентни:
1) φ е симетричен/ермитов оператор
2) за произволен базис $a_1, ..., a_n$ на V е изпълнено $\langle \varphi(a_i), a_j\rangle = \langle a_i, \varphi(a_j)\rangle \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}$
3) за произволен ортонормиран базис $b_1, ..., b_n$ на V е изпълнено $\langle \varphi(b_i), b_j\rangle = \langle b_i, \varphi(b_j)\rangle \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}$
4) спрямо ортонормиран базис $b_1, ..., b_n$ на V, матрицата на φ е симетрична/ермитова

Доказателство: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) Очевидно

3) $\Leftrightarrow$ 4) Нека $A = (A_{ij})^n_{i,j=1} \in M_{n\times n}(F)$ да бъде матрицата на φ спрямо ортонормирания базис $b_1, ..., b_n$. Координатите на $\varphi(b_i)$ са разположени в i-тия стълб, тогава $\langle \varphi(b_i), b_j\rangle = \left\langle \sum\limits_{s=1}^n A_{si} b_s\ ,\ b_j \right\rangle = \sum\limits_{s=1}^n A_{si} \langle b_s, b_j\rangle = A_{ji}\langle b_j, b_j\rangle = A_{ji}$ и $\langle b_i, \varphi(b_j)\rangle = \left\langle b_i\ ,\ \sum\limits_{s=1}^n A_{sj} b_s \right\rangle = \sum\limits_{s=1}^n \overline{A_{sj}} \langle b_i, b_s\rangle = \overline{A_{ij}}\langle b_i, b_i\rangle = \overline{A_{ij}}$.

Тоест 3) е еквивалентно на $A_{ij} = \langle \varphi(b_i), b_j \rangle = \langle b_i, \varphi(b_j) \rangle = \overline{A_{ij}} \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}$. Имайки предвид, че $(\overline{A}^t)_{ji} = (\overline{A})_i j = \overline{A_{ij}}$, то $A_{ji} = (\overline{A}^t)_{ji}$, което се свежда до $A = \overline{A}^t$.

3) $\Rightarrow$ 1) По предположение, за произволни вектори $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i b_i \in V$ и $v = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j b_j \in V$ е изпълнено

$$\begin{aligned}\langle \varphi(u), v \rangle &= \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(b_i), \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle \varphi(b_i), b_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle b_i, \varphi(b_j) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(b_j) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} y_j b_j\right) \right\rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle\end{aligned}$$

Следователно φ е симетричен/ермитов оператор. $\square$

Твърдим, че при ненулево крайномерно евклидово/унитарно пространство V, за симетричен/ермитов оператор $\varphi : V \to V$, характеристичните му корени са реални числа.

Доказателство: Първо ще проверим, че е вярно за произволна собствена стойност. Избираме произволен собствен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ с произволна собствена стойност $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогава $\overline{\lambda}||v||^2 = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda ||v||^2$. Следователно $(\overline{\lambda} - \lambda)||v||^2 = \overline{\lambda}||v||^2 - \lambda||v||^2 = 0$. Понеже $||v||^2 \in \mathbb{R}^{>0}$, то $\overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$.

Разглеждаме ермитов оператор $\varphi : V \to V$. Сега ще покажем, че е вярно за всички собствени стойности. По определение, $f_\varphi(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ има комплексни коефициенти и съгласно основната теорема на алгебрата, всички корени на $f_\varphi(x) = 0$ са комплексни числа. Нека A да бъде матрицата на φ спрямо произволен ортонормиран базис. Всички характеристични корени на φ са собствени стойности (твърдение) и от първата стъпка, следва че корените са реални числа.

Всяка матрица на ермитов оператор се реализира спрямо ортонормиран базис. Тоест характеристичните корени на φ съвпадат с тези на A и характеристичните корени на ермитова матрица са реални числа.

Всяка симетрична матрица е и ермитова, понеже $M_{n\times n}^{sym}(\mathbb{R}) \subset M_{n\times n}^{Herm}(\mathbb{C})$ и затова характеристичните корени на симетрични матрици са реални числа. $\square$

Твърдим, че за евклидово или унитарно пространство V със симетричен или ермитов оператор $\varphi : V \to V$, собствените му вектори са ортогонални помежду си си.

Доказателство: Прилагаме определението за симетричност/ермитовост на φ към собствените вектори $u, v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$: $\mu\langle u, v \rangle = \overline{\mu}\langle u, v \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(u), v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$. Следователно $(\lambda - \mu)\langle u, v \rangle = \lambda\langle u, v \rangle - \mu \langle u, v \rangle = 0$, където $\lambda \neq \mu \implies \langle u, v \rangle = 0$ и u, v са ортогонални (помежду си). $\square$

Твърдим, че за евклидово или унитарно пространство V, симетричен/ермитов оператор $\varphi : V \to V$ и φ-инвариантно подпространство $U \subset V$, ортогоналното допълнение $U^\perp$ е φ-инвариантно.

Доказателство: За произволни $u \in U, v \in U^\perp$: $\langle u, \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(u), v \rangle = 0$, имайки предвид че $\varphi(u) \in U$. Следователно $\varphi(v) \in U^\perp$ и $U^\perp$ е φ инвариантно. $\square$

Твърдим, че в n-мерно евклидово или унитарно пространство V и произволен симетричен/ермитов оператор $\varphi : V \to V$ съществува ортонормиран базис $e = (e_1, ..., e_n)$ на V, за който матрицата на φ е диагонална.

Доказателство: Ще докажем твърдение с индукция по $n = \dim V$.

База: $n = 1$ Няма какво да се доказва

Индукционна стъпка: Ако φ е ермитов оператор, то съществува собствен вектор по теорема. Ако φ е симетричен оператор, то всички характеристични корени са реални числа и тогава са и собствени стойности, следователно съществува собствен вектор отговарящ на някоя собствена стойност.

Нека този вектор да е $v_1 \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ със собствена стойност $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. $e_1 = \frac{v_1}{||v_1||} \in l(v_1)$ и забелязваме, че $U := l(e_1) = l(v_1)$. От индукционното предположение, съществува ортонормиран базис $e_2, ..., e_n$

на $U^{\perp}$ за който матрицата на $\varphi : U^{\perp} \to U^{\perp}$ е диагонална. Тогава $e_1, ..., e_n$ е ортонормиран базис на $V = U \oplus U^{\perp}$ и матрицата на $\varphi : V = U \oplus U^{\perp} \to V = U \oplus U^{\perp}$ е диагонална. $\square$

Твърдим, че за симетрична или ермитова матрица A съществува ортогонална матрица T, такава че $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$ е диагонална.

Доказателство: Разглеждаме линеен оператор $\varphi : V \to V$ с матрица A спрямо ортонормиран базис f на n-мерно евклидово/унитарно пространство V. От миналото твърдение знаем, че операторът на φ е симетричен/ермитов и съществува ортонормиран базис e за който матрицата D на φ е диагонална. Матрицата на прехода T от f към e е ортогонална/унитарна и $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$. $\square$