Не са написани някои неща, които вече фигурират във файла по Дискретни структури в **Лекция 2**, **Лекция 3**, **Лекция 4** и **Лекция 6**.

Лекция 1 Реални числа - първа част

1.1 Множества

Множество на естествените числа	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
Множество на целите числа	$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
Множество на рационалните числа	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$
Множество на реалните числа	$\mathbb{R} = \{s\, a_0.a_1a_2 \cdots : s \in \{+, -\}, a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_n \in \{1, 2, ..., 9\}, n \in \mathbb{N}\}$

Нека $a = a_0.a_1a_2\cdots$, $b = b_0.b_1b_2\cdots$ и $a, b \in \mathbb{R}$.

- *Равенство:*
  $a = b$, ако имат еднакви знаци и
  - *или* $\forall i \in \{0, 1, 2, ...\} : a_i = b_i$,
  - *или* $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}, a_i = b_i\ \forall j \in \{n+1, n+2, ...\}, a_j = 0, b_j = 9 : a_n = b_n + 1$
    Пример: $1.333\cdots33300\cdots0\cdots = 1.333\cdots33299\cdots9\cdots$

- *Сравняване:*
  1. $a \geq 0, b \geq 0$
  $$a \leq b \iff \begin{cases} a_i = b_i, & \forall i \in 0, 1, 2, ... \\ \text{или} & \\ \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, & a_i = b_i\ \forall i \in \{0, 1, ..., n-1\} \text{ и } a_n < b_n \end{cases}$$
  2. $a \leq 0, b \geq 0$ $\quad a \leq b$
  3. $a \leq 0, b \leq 0$ $\quad a \leq b \iff |a| \geq |b|$

1.2 Граници и ограниченост

Нека $A \subset \mathbb{R}$

- *Множество, ограничено отгоре* $\quad \exists M \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \leq M \quad$ *M - горна граница (мажоранта)*
  Най-малката горна граница наричаме *точна горна граница или супремум на A* ($\sup A$)
  1. $a \leq \sup A\ \forall a \in A$ $\quad$ ($\sup A$ е горна граница)
  2. $\forall c < \sup A\ \exists a \in A : a > c$ $\quad$ (няма по-малка горна граница)
- *Множество, ограничено отдолу* $\quad \exists M \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \geq M \quad$ *M - долна граница (миноранта)*
  Най-малката долна граница наричаме *точна долна граница или инфимум на A* ($\inf A$)
- *Ограничено множество* $\quad$ Ако е ограничено отдолу и отгоре

Принцип на непрекъснатост: Всяко ограничено отгоре непразно множество $A \subset \mathbb{R}$ има супремум.
Всяко ограничено отдолу непразно множество $A \subset \mathbb{R}$ има инфимум.

Цялата част на $x \in \mathbb{R}$: най-голямото цяло число z, ненадминаващо x. $\quad \lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$

Лекция 2 Реални числа - втора част и сходящи редици

2.1 Непрекъснати наредени полета

Аксиома на Архимед: Ако $(R, \oplus, \otimes, \preceq)$ е непрекъснато наредено поле с неутрален елемент e относно умножението, то $\{e, e + e, e + e + e, ...\}$ не е ограничено отгоре.

2.2 Изброими множества и редици

Кофинитно множество: Едно множество $A \subset \mathbb{N}$ от естествени числа се нарича кофинитно, ако $\mathbb{N} \setminus A$ е крайно или празно. (тоест, започва от някое число в $\mathbb{N}$ и продължава до безкрайност)

Околност на точка: Нека $a \in \mathbb{R}$ и $U \subset R$. U е околност на точката a, ако съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$

Ако разглеждаме $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}$, говорим за *пробита околност*

Редица: Всяко изображение $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Граница на редица: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ има граница $a \in \mathbb{R}$, ако за всяка околност на a, $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in U\}$ е кофинитно. (тоест, ако всяка околност на a съдържа почти всички членове)

Сходяща редица:

$$\exists a \in \mathbb{R} : a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Разходяща редица: Ако не е сходяща

Лекция 3 Редици от реални числа

3.1 Основни свойства на сходящи редици

Ако не е определено друго: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $\quad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

1. Добавянето и премахването на краен брой членове не влияе на сходимостта (и границата)

2. Сходящите редици са ограничени

3. Ако $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, то $a \leq b$

4. *Лема за двамата полицаи:* Нека $a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $\quad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ (и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща)

   Следствие: Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, то $a_n.b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

5. $a_n \pm b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \pm b \qquad a_n.b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$

   Следствие: Ако $c \in \mathbb{R}$, то $c.a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ca$

   Следствие: $a_n - b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a - b$

6. Ако $b \neq 0$, то $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{b}$

3.2 Дивергиране към безкрайност

Околност на $+\infty$: $\exists M \in \mathbb{R}, (M, +\infty) \subset U \subset \mathbb{R} : U$ е околност на $+\infty$
Околност на $-\infty$: $\exists M \in \mathbb{R}, (-\infty, M) \subset U \subset \mathbb{R} : U$ е околност на $-\infty$
Околност на ∞: $\exists M > 0, [(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)] \subset U \subset \mathbb{R} : U$ е околност на ∞

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n : a_n > M$$

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n : a_n < M$$

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n : |a_n| > M$$

3.3 Монотонни редици

Растяща редица: Ако $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е растяща
Намаляваща редица: Ако $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е намаляваща
Монотонна редица: Ако редицата е растяща или нямаляваща
Ако редицата е растяща и намаляваща едновременно, тя е *стационарна*

Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща и ограничена отгоре, тя е сходяща.
Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща и ограничена отдолу, тя е сходяща.

3.4 Неперово число

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

Лекция 4 Редици от релани числа. Граници на функции.

4.1 Подредици и точки на сгъстяване

Точка на сгъстяване: $a \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване, ако във всяка околност на a има безброй много членове на редицата
За $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване, ако за всяка околност U на x_0, $U \cap D$ е безкрайно

Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то a е (единствената) точка на сгъстяване

Подредица: Ако задраскаме част от членовете, така че да останат безкрайно много и запазим реда на останалите (композиция на строго растящо $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$)
Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща редица ($a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$) и $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е нейна подредица, то $a_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

a е точка на сгъстяване, когато съществува $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$

Теорема на Болцано-Вайерщрас (Принцип за компактност): Всяка ограничена редица има точка на сгъстяване. Еквивалентно, всяка ограничена редица има сходяща подредица.

4.2 Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост

Фундаментална редица: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n_0\ \forall n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$ (разстоянието между произволни два от елемента може да се направи произволно малко, от някъде нататък; условие за сходимост без да използваме граница)

Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на числова редица: Една редица от реални числа е сходяща точно тогава, когато е фундаментална

4.3 Граница на функция

Нека $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстаяване на D

Граница на функция (форма на Коши):
f има граница $L \in \mathbb{R}$, при аргумент клонящ към x_0,
ако за всяка околност U на L съществува околност V на x_0, така че за всяко $x \in V \cap D, x \neq x_0 : f(x) \in U$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{ако} \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$$

Граница на функция (форма на Хайне):
f има граница $L \in \mathbb{R}$, при аргумент клонящ към x_0,

ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}$, която клони към x_0, съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ клони към L

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x : f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$$

Лекция 5 Граници на функции

Дефинициите за граница на функция във *формата на Коши* и във *формата на Хайне* са еквивалентни

5.1 Основни свойства на граници

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = L_f + L_g$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_f \cdot L_g$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L_f}{L_g}$, ако $L_g \neq 0$

При неравенства

- Ако $f(x) \leq g(x)$ за $x \in D$, то $L_1 \leq L_2$
- Ако $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ за $x \in D$ и $L_1 = L_2$, то $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L_1 = L_2$

Композиция на функции: $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, при $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$

5.2 Граница на дивергираща функция

$$\xi, \eta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$$

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \iff \forall U \text{околност на } \eta\ \exists V \text{околност на } \xi\ \forall x \in V \cap D, x \neq \xi : f(x) \in U \quad \textit{(форма на Коши)}$$

$$\iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{\xi\}, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi : f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta \quad \textit{(форма на Хайне)}$$

Необходимо и достатъчно условие на Коши за съществуване на граница на функция:

$$\exists L \in \mathbb{R} : \lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

$$\textit{Лява граница: } \lim_{x\to x_0^-} f(x) := \lim_{x\to x_0} \left(f|_{D\cap(-\infty,x_0)}\right)(x)$$

$$\textit{Дясна граница: } \lim_{x\to x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0} \left(f|_{D\cap(x_0,+\infty)}\right)(x)$$

Лекция 6 Непрекъснати функции

Непрекъсната функция:

Форма на Коши: $(\forall x_0 \in D)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Форма на Хайне: $(\forall x_0 \in D)\ \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 : f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$

6.1 Основни теореми

Ако не е посочено друго, работим с $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, която е непрекъсната

Теорема на Болцано: Ако $f(a) \cdot f(b) < 0$, то съществува $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$

Теорема за междинните стойности: Ако $f(a) < c < f(b)$ или $f(b) < c < f(a)$, то съществува $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = c$

Интервал: $\Delta \subset \mathbb{R}$ наричаме интервал, ако $x_1 \in \Delta, x_2 \in \Delta, x_1 < x_2 \implies [x_1, x_2] \subset \Delta$

Следствие: Непрекъснатият образ на интервал е интервал

Теорема на Вайерщрас: Щом f е непрекъсната, то f е ограничена и има най-голяма и най-малка стойност

Равномерна непрекъснатост: За $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, f е равномерно непрекъсната в D, ако $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ \forall x_0 \in D, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad$ (δ не зависи от x_0)

Теорема на Кантор: Ако f е непрекъсната, то f е равномерно непрекъсната в $[a, b]$

Лекция 7 Основни елементарни функции

Продължение на функция: За $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ казваме, че $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е продължение на f, ако $\widetilde{f}(x) = f(x)$ за всяко $x \in \mathbb{Q}$

f притежава (единствено) непрекъснато продължение $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, когато f е непрекъсната върху всеки ограничен затворен интервал $[c, d] \cap \mathbb{Q}$

Експонента: Единственото непрекъснато продължение $\widetilde{f_a}$ на $f_a(x) = a^x$ наричаме експонента с основа a, $a^x := \widetilde{f_a}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

7.1 Обратни тригонометрични функции

1. arcsin: $\quad \sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \qquad \arcsin \equiv \left(\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

   $\sin(\arcsin(y)) = y \quad \forall y \in [-1, 1] \qquad \arcsin(\sin(x)) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (еквивалентно за останалите)

2. arccos: $\quad \sin|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad \arccos \equiv \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$

3. tg: $\quad \mathrm{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, +\infty) \qquad \mathrm{arctg} \equiv \left(\mathrm{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1} : (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

4. arccotg: $\quad \mathrm{cotg}|_{(0,\pi)} : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty) \qquad \mathrm{arccotg} \equiv \left(\mathrm{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$

7.2 Основни граници

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0 \qquad \lim_{x\to x_0} c = c \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} a^x = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad \left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\right) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ a > 0 \quad \left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\right)$$

$$e^x = \lim_{n\to 0} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n b_n}, \quad p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty$$

Неравенство на Бернули: $(1 + x)^n \geq 1 + nx, x \geq -1$

Лекция 8 Диференцируемост и производна

Диференцируемост на функция: $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точка $x \in \Delta$, ако съществува граница $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ако f е диференцируема в x, то f е непрекъсната в x

8.1 Правила за диференциране

1. *Диференциране на сума:* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
   Диференциране на разлика: $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
2. *Диференциране на произведение:* $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
   Диференциране на произведение с константа: $(cf)'(x) = cf'(x)$
   Диференциране на частно: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
3. *Диференциране на композиция от функция:* $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$
4. *Диферницpане на обратна биекция:* $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

8.2 Основни производни

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a > 0) \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{cotg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1) \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R} \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Лекция 9 Основни теореми за диференцируеми функции

Локален екстремум на функция: Нека $f : D \to \mathbb{R}$. f има *локален минимум* в x_0, ако съществува $\delta > 0$, такова че $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ и $f(x_0) \leq f(x)$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Аналогично има *локален максимум* ако $f(x_0) \geq f(x)$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Теорема на Ферма: Нека $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 е точка на локален екстремум и f диференцируема в x_0. Тогава $f'(x_0) = 0$.

Теорема на Рол: Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f диференцируема в (a,b), f непрекъсната в точките a, b и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува $\xi \in (a,b)$, такова че $f'(\xi) = 0$.

9.1 Теорема на крайните нараствания и следствия

Теорема на Лагранж (Теорема за крайните нараствания): Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f диференцируема в (a,b), f непрекъсната в точките a, b. Тогава съществува $\xi \in (a,b)$, такова че $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Принцип за константност (Основна теорема на диференциалното смятане): Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, f диференцируема в Δ. f е константа точно тогава, когато $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \Delta$.

Принцип за монотонност: Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, f диференцируема в Δ.

f растяща в $\Delta \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Delta$ $\qquad$ f намаляваща в $\Delta \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Delta$

Производни от по-висок ред: Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, $f'(x)$ съществува за всяко $x \in \Delta$. Означаваме $f''(x) := (f')'(x)$ и индуктивно дефинираме, $f^{(n+1)} := \left(f^{(n)}\right)'$. $f^{(0)} := f$.

9.2 Обобщена теорема на крайните нараствания и следствия

Теорема на Коши (Обобщена теорема за крайните нараствания): Нека $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g диференцируеми в (a, b), f, g непрекъснати в $[a, b]$ и $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.
Тогава съществува ξ, такова че $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

1-ва теорема на Лопитал (неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$): Нека $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$, диференцируеми в (a, b), непрекъснати в b, $f(b) = g(b) = 0$, $g'(x) \neq 0$ в (a, b) и съществува $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогава съществува $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2-ра теорема на Лопитал (неопределеност $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$): Нека $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$, диференцируеми в (a, b), $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ в (a, b) и съществува $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогава съществува $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Лекция 10 Полином на Тейлър

Нека $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$ са n пъти диференцируеми. $\qquad (f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \qquad (c.f)^{(n)} = c.f^{(n)}$

Формула на Лайбниц: Нека $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ отворен интервал и са n пъти диференцируеми.
Тогава $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

10.1 Полином на Тейлър

Означение о-малко: Нека $g : \Delta \to \mathbb{R}$, $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ и $g(x) \neq 0$. $f(x) = o(g(x))$ ($f(x)$ е о-малко от $g(x)$) ако $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Полином на Тейлър от n-та степен около точка a: Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, $a \in \Delta$, f е $(n - 1)$ пъти диференцируема в Δ, f е n пъти диференцируема в a. Тогава

$$T_n(x) = \quad f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x - a)^i$$

10.2 Формула на Тейлър

Формула на Тейлър за f около a с остатъчен член във форма на Пеано:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \ o\left((x - a)^n\right)$$

Формула на Тейлър за f около a с остатъчен член във форма на Лагранж:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}}_{\xi(x) \text{ е между } a \text{ и } x}$$

Формула на Маклорен: Формула на Тейлър, за която $a = 0$

10.3 Равитие на някои функции в ред на Маклорен

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2k+1}\right)$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2k}\right)$
4. $(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o\left(x^n\right)$
5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o\left(x^n\right)$

Лекция 11 ДУ за лок. екстремум. Изпъкнали функции.

Достатъчно условие за локален екстремум, използващо n-та производна: Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, $x_0 \in \Delta$, $n \geq 2$, f е $(n-1)$ пъти диференцируема в Δ, f е n пъти диференцируема в x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогава:

- Ако n е четно, x_0 е точка на локален екстремум. Ако $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 е строг локален минимум, иначе ако $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 е строг локален максимум.
- Ако n е нечетно, x_0 не е точка на локален екстремум.

11.1 Изпъкнали множества и функции

Изпъкнало множество: Нека $A \subset \mathbb{R}^2$. Ако за всеки избор на $a', a'' \in A$, цялата отсечка $[a', a'']$, лежи изцяло в A. Или формално:

$$\left[a', a''\right] := \left\{a' + t(a'' - a') \mid t \in [0,1]\right\} = \left\{p_1 a' + p_2 a'' \mid p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ p_1 + p_2 = 1\right\}$$

Епиграфика на функция f: Нека $f : D \to \mathbb{R}$. Епиграфика наричаме:

$$epi(f) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D,\ y \in \mathbb{R},\ y \geq f(x)\right\}$$

Изпъкнала функция: Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. f наричаме изпъкнала, ако $epi(f)$ е изпъкнало подмножество на равнината.

Теорема: Нека $f : D \to \mathbb{R}$. f е изпъкнала тстк $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad \forall x_1, x_2, x \in D : x_1 < x < x_2$

Теорема: Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, f диференцируема в Δ. f изпъкнала $\iff$ f' е растяща в Δ.

Следствие: Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, f два пъти диференцируема в Δ. f изпъкнала точно когато $f'' \geq 0$ в Δ.

Твърдение: Нека $f : D \to \mathbb{R}$ е изпъкнала. Тогава f е непрекъсната точка x_0, която притежава околонст $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, съдържаща се изцяло в D.

11.2 Неравенство на Йенсен

Неравенство на Йенсен: Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е изпъкнала, произволни $x_1, x_2, ..., x_n \in \Delta$, с тегла $p_1, ..., p_n \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$. Тогава е изпълнено:

$$f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$$

Лекция 12 Неопределен интеграл. Техники на интегриране.

Примитивна за функция f: Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ интервал. Функция $F : \Delta \to \mathbb{R}$ се нарича примитивна за f, ако F диференцируема в Δ и $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta$

Неопределен интеграл на f: Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$. Неопределен интеграл на f е множеството от всички примитивни на f в Δ.

12.1 Таблица на основните интеграли

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{cotg} x + C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$$

12.2 Техники за интегриране

- *Линейност*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad \int (k \cdot f(x))dx = k \int f(x)dx$$

- *Внасяне под знака на диференциала*

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = G(f(x)) + C \text{ , където } g(y) = G'(y) \qquad df(x) := f'(x)dx$$

- *Интегриране по части*

$$\int f(x)g'(x)x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad \int f(x)d(g(x)) = f(x)g(x) - \int g(x)d(f(x))$$

Лекция 13 Интегриране чрез субституции и на рационални ф-и

Интегриране чрез субституции: Нека $f : \Delta_x \to \mathbb{R}$ непрекъсната, $\varphi : \Delta_t \to \Delta_x$ биекция, φ, φ^{-1} диференцируеми и Δ_x, Δ_t отворени интервали. Ако е изпълнено

$$\int f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C \text{ , то } \int f(x)dx = F\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C$$

Интегриране на рационални функции: Нека $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, където P, Q са полиноми на x.

1. *Свеждане към интегриране на правилна рационална функция* (тоест свеждане към рационална функция с по-малка степен на числителя отколкото на знаменателя)

   Ако $\deg P \geq \deg Q$, от алгебрата е извечстно, че $\exists P_1, P_2 : \frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}, \quad \deg P_2 < \deg Q$.

   От тук нататък предполагаме, че $\deg P < \deg Q$.

2. *Разлагане на знаменателя на множители*

   Ако $\deg Q = n$, от алгебрата полиномът Q има точно n комплексни корена $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ и $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = a_0(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$

   След доказателство, полиномът Q с реални коефициенти може да се разложи на:
   $Q(x) = a_0(x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_s)^{\alpha_s}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + p_tx + q_t)^{\beta_t} \quad p_j^2 - 4q_j < 0 \; \forall j \in \{1, 2, ..., t\}$

3. *Представяне на рациоанлна функция като сума на елементарни дроби*

   Приемаме без доказателство, че за горното съществуват константи $A_1^i, A_2^i, ..., A_{\alpha_i}^i,\ i \in \{1, 2, ..., s\}$ $M_j^1, M_j^2, ..., M_j^{\beta_j},\ N_j^1, N_j^2, ..., N_j^{\beta_j}\ j \in \{1, 2, ..., t\}$, такива че за всяко x е изпълнено:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{A_1^i}{x - a_i} + \frac{A_2^i}{(x - a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{a_i}^i}{(x - a_i)^{\alpha_i}} \right) + \\ + \sum_{t=1}^{t} \left(\frac{M_j^1 x + N_j^1}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{M_j^2 x + N_j^2}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \cdots + \frac{M_j^{\beta_j} x + N_j^{\beta_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{\beta_j}} \right)$$

   Търсим константите. Забелязваме, че те са $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s + 2\beta_1 + \cdots + 2\beta_t = \deg Q$ на брой.

Елементарна дроб от първи вид: Рационална функция от вида $\frac{A}{(x-a)^\alpha} \quad A, a \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{N}$

$$\int \frac{A}{(x-a)^\alpha} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^\alpha} = A \int (x-a)^{-\alpha} d(x-a) = \begin{cases} \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha \neq 1 \\ \ln|x-a| + C & \alpha = 1 \end{cases}$$

Елементарна дроб от втори вид: Рационална функция от вида $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta} \quad M, N, p, q \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{N},\ p^2 - 4q < 0$. Интегрирането и започва със субституция на Хорнер $y = x + \frac{p}{2}$:

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} dx = \int \frac{M'y + N'}{(y^2 + b^2)^\beta} dy = M' \int \frac{y}{(y^2 + b^2)^\beta} dy + N' \int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^\beta} = \\ = \frac{M'}{2} \int \frac{d(y^2 + b^2)}{(y^2 + b^2)^\beta} + N' \int \frac{dy}{(y^2 + b^2)^\beta} = \cdots$$