Лекция 1 Съждителна логика

Свойства на константите	$p \wedge T \equiv p, \quad p \vee F \equiv p, \quad p \vee T \equiv T, \quad p \wedge F \equiv F$
Свойства на отрицанието	$p \wedge \neg p \equiv F, \quad p \vee \neg p \equiv T$
Закон за двойното отрицание	$\neg(\neg p) \equiv p$
Идемпотентност	$p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p$
Комутативност	$p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$
Асоциативност	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r), \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Дистрибутивност	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r), \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Закони на De Morgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q, \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
Поглъщане	$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Свойство на импликацията	$p \to q \equiv \neg p \vee q$
Свойство на би-импликацията	$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Лекция 2 Множества

Множество, което не съдържа себе си, е обикновено. Множество, което съдържа себе си, е необикновено.

2.1 Аксиоми

1. *Аксиома за обема*
   Две множества са равни тстк съдържат едни и същи елементи (редът е без значение)

2. *Аксиома за отделянето*
   Ако X е множество и π е предикат с домейн X, то съвкупността Y от елементите на X, които имат свойството π, е множество.

   $B = \{a \in A \mid \pi(a)\}$ Казваме, че B е подмножество на A

3. *Аксиома за степенното множество*
   За всяко множество X съществува множество 2^X от всички негови подмножества, което наричаме степенното множество на X

4. *Максимално по включване множество*
   Множество, за което свойството (предикатът) е в сила, но то не е в сила за никое същинско негово надмножество.

   1. $\sigma(B)$ и
   2. $\forall C\,(B \subset C \subseteq A \to \neg\sigma(C))$

   Минимално по включване множество
   Такова подмножество, за което свойството (предикатът) е в сила, но не е в сила за никое същинско негово подмножество.

   1. $\sigma(B)$ и
   2. $\forall C\,(C \subset B \to \neg\sigma(C))$

2.2 Операции

1. *Симетрична разлика*
   $A \triangle B = \{a \mid a \in A \oplus a \in B\}$ Пример: $\{a, b, c, d\} \triangle \{a, b, x, y\} = \{c, d, x, y\}$

2. *Допълнение* на множество A до универсум U
   $\overline{A^U} = \{a \mid a \in U \wedge a \notin A\}$ Ако U се подразбира, пишем само $\overline{A}$

2.3 Наредена двойка

(Дефиниция на Kuratowski) Всяко множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ наричаме наредена двойка с първи елемент a и втори елемент b. Краткият запис е “(a, b)”.

2.4 Разбиване и покриване

1. *Покриване на A*
   Всяка фамилия $X = \{X_1, X_2, ..., X_k\}, k \geq 0$, където

   1. $\forall i \in \{1, 2, ..., k\} : X_i \subseteq A$
   2. $\forall i \in \{1, 2, ..., k\} : X_i \neq \emptyset$
   3. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} X_i = A$

   Тоест, всяка фамилия, чието обединение на множества е даденото множество.
   Пример: $A = \{a, b, c, d\}$ $X = \{\{a, b, d\}, \{b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$

2. *Разбиване на A*
   Всяка фамилия $X = \{X_1, X_2, ..., X_k\}, k \geq 0$, където

   1. $\forall i \in \{1, 2, ..., k\} : X_i \subseteq A$
   2. $\forall i \in \{1, 2, ..., k\} : X_i \neq \emptyset$
   3. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} X_i = A$
   4. $\forall i \forall j (1 \leq i < j \leq k \to X_i \cap X_j = \emptyset)$

   Тоест, покриване, при което няма общи елементи между множествата във фамилията.
   Пример: $A = \{a, b, c, d\}$ $X = \{\{a, c\}, \{b\}, \{c\}\}$

2.5 Доказателство по индукция

1. *Обикновена индукция*

   1. *База*: Проверяваме за най-ниската възможна стойност $P(0), n \geq 0$
   2. *Индукционно предположение*: Допускаме че е вярно за произволна стойност $P(n)$
   3. *Индукционна стъпка*: Доказваме че е вярно за следващата произволна стойност, въз основа на индукционното предположение $P(n+1)$

2. *Силна индукция*

   1. *База*: Проверяваме за най-ниската възможна стойност $P(0), n \geq 0$
   2. *Индукционно предположение*: Допускаме, че е вярно за всички стойности от най-ниската до произволно n $P(0), P(1), ..., P(n)$
   3. *Индукционна стъпка*: Доказваме че е вярно за следващата произволна стойност, въз основа на индукционното предположение $P(n+1)$

Лекция 3 Релации

Релация над декартовото произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ се нарича всяко множество $R \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$

3.1 Свойства на релации от вида $R \subseteq A^2$

1. *Рефлексивност* $\forall a \in A : aRa$
   Антирефлексивност $\forall a \in A : \neg aRa$

2. *Симетричност* $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \to bRa$
   Антисиметричност $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \to \neg bRa$
   Силна антисиметричност $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \oplus bRa$

3. *Транзитивност* $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \to aRc$

3.1.1 Затваряне на релации

1. *Рефлексивно затваряне* R'
   1. $R' \subseteq A^2$
   2. $R \subseteq R'$
   3. R' е рефлексивна

Аналогично за симетрично и транзитивно затваряне

3.1.2 Типове релации

1. *Релация на еквивалентност*: рефлексивна, симетрична, транзитивна
   Класове на еквивалентност: $[a] = \{b \in A \mid aRb\}$ Дефакто са разбивания на R

2. *Релация на частична наредба*: рефлексивна, антисиметрична, транзитивна
   Минимален елемент: a е минимален, ако $\neg\exists b \in A, a \neq b : bRa$
   Максимален елемент: a е максимален, ако $\neg\exists b \in A, a \neq b : aRb$

   Релация на частична строга наредба: антирефлексивна, антисиметрична, транзитивна

   Диаграма на Hasse: Чертаем диаграма на релацията, така че всички стрелки да сочат нагоре, изпускаме примките, изпускаме посоките на стрелките, изпускаме транзитивните стрелки.

   Няма контури в частичните наредби!

3. *Релация на линейна наредба*: рефлексивна, силно антисиметрична, транзитивна
   Линейно разширение: Частична наредба R, линейна наредба R', $R \subseteq R' \implies R'$ е линейно разширение на R

   Релация на линейна строга наредба: антирефлексивна, силно антисиметрична, транзитивна

3.1.3 Верига и контур

- *Верига*: всяка редица $a_{i_0}, a_{i_1}, ..., a_{i_k}$, където
  $i_0, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$, $a_{i_j} \, R \, a_{i_{j+1}}$ и $a_{i_j} \neq a_{i_{j+1}}$ за $0 \leq j < k$

  Дефакто, редица от елементи, където всеки два съседни елемента са в релация.
  Веригите НЕ минават през примки!

- *Контур*: всяка верига, за която е вярно и, че $a_{i_0} = a_{i_k}$ за $k > 0$

  Дефакто, редица от елементи, където всеки два съседни елемента са в релация и първия и последния също са в релация.

Лекция 4 Функции

- *Тотална функция*: Всяка релация $f \subseteq X \times Y$, където за всяко x има точно едно $y : (x, y) \in f$
- *Частична функция*: Всяка релация $f \subseteq X \times Y$, където за всяко x има не повече от едно $y : (x, y) \in f$

4.1 Свойства

1. *Инекция*: Всеки елемент на Y е образ най-много на един елемент на X
   $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
2. *Сюрекция*: Всеки елемент на Y е образ на поне един елемент на X
   $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
3. *Биекция*: Ако имаме инекция и сюрекция (взаимозначно съответствие)

4.1.1 Изброимост

- *Крайно множество*: Ако A е празно, то имаме кардиналност 0.
  Иначе, трябва да съществува n, за което съществува биекция $f : A \to \{1, 2, ..., n\}$
- *Безкрайно множество*: Ако не е крайно
  Изброимо безкрайно мнжоество: Ако е равномощно на $\mathbb{N}$ $\qquad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^2, ...$
  Неизброимо безкрайно множество: Ако не е изброимо безкрайно $\qquad \mathbb{R}, \mathbb{C}, 2^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^2, 2^{\mathbb{R}}, ...$

4.1.2 Принцип на Дирихле

За крайни X и Y, $|X| > |Y|$, то не съществува инекция $f : X \to Y$
Ако имаме m обекта в n чекмеджета, то има поне едно чекмедже с $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ обекта.

4.2 Рестрикция на функция

Нека $f : X \to Y$ и $X' \subseteq X$. Рестрикция на f върху X' е $f' : X' \to Y$, $\forall x \in X' : f'(x) = f(x)$
Бележи се $f|_{X'}$ (Дефакто работим с част от елементите на домейна)

Лекция 5 Изброителна комбинаторика

5.1 Принципи

1. *Принцип на Дирихле*
2. *Принцип на разбиването*
   Кардиналността е сума от кардиналностите на дяловете на разбиване.
   За множество X и негови разбивания $\{Y_1, ..., Y_k\}$, имаме $|A| = |Y_1| + ... + |Y_k| = \sum\limits_{i=1}^{k} |Y_i|$

   Принцип на изваждането (следствие от Принцип на разбиването)
   За множество A и универсум U, имаме $|A| = |U| - |\overline{A}|$
3. *Принцип на умножението*: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
4. *Принцип на биекцията*: $|A| = |B|$ тстк съществува биекция $f : A \to B$
5. *Принцип на делението*
   За $k =$ брой класове на еквивалентност, $|[a]| = m$, имаме $m = \frac{|A|}{k}$

6. *Принцип на включването и изключването*
   Кардиналността е сума от дяловете на покритие със изваждане на техни сечения.

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap ... \cap A_n|$$
$$|\overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_n}| = |U| - \sum_{1\le i\le n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| - ... + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap ... \cap A_n|$$

Лекция 6 Комбинаторни конфигурации

Дадено е опорно множество $= a1, a2, ..., an$ чрез което ще изграждаме комбинаторни конфигурации. Общоприето е, че n е брой елементи в A, m е брой елементи в конфигурация.

1. *Множество от конфигурации с наредба, с повтаряне*
   $\text{К}_{\text{Н, П}}(n,m) = A^m \equiv \widetilde{V}_n^m$ $\qquad |\text{К}_{\text{Н, П}}(n,m)| = |A^m| = n^m$

2. *Множество от конфигурации с наредба, без повтаряне*
   $\text{К}_{\text{Н}}(n,m) \equiv V_n^m$ $\qquad |\text{К}_{\text{Н}}(n,m)| = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot ... \cdot(n-m+1) = n^{\underline{m}}$

   Пермутации с повторения: частен случай, когато $n = m$. $|\text{К}_{\text{Н}}(n,m)| = n!$

3. *Множество от конфигурации без наредба, без повтаряне*: просто комбинации/подмножество
   $\text{К}(n,m) \equiv C_m^n$ $\qquad |\text{К}(n,m)| = \frac{|\text{К}_{\text{Н}}(n,m)|}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!} = \binom{n}{m}$

Различаваме по:	Комбинации Съставни елементи	Вариации Съставни елементи и ред	Пермутации Ред
Без повторение	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}}$	$P_n = n!$
С повторение	$\widetilde{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$\widetilde{V}_n^k = n^k$	$\widetilde{P}_n^{n_1,n_2,...,n_m} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_m!}$

6.1 Свойства на биномни коефициенти

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Нютонов бином $\quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot n^k \cdot y^{(n-k)}$

От комбинаторни разсъждения $\quad \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \qquad \binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k}$

6.2 Характеристичен вектор

Булева n-торка, която характеризира/определя дадено множество X, където:
Ако $n \in X$, то $a_n = 1$ $\qquad$ Ако $n \notin X$, то $a_n = 0$

6.2.1 Свойства (за булеви вектора с n единици и m нули)

- Брой: $\binom{n+m}{n}$
- Брой, като след всяка единица има нула: $\binom{m}{n}$
- Брой, като няма съседни единици: $\binom{m+1}{n}$

6.3 Свойства на суми

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \sum_{k=0}^{n} a = a(n+1)$$

Лекция 7 Рекурентни уравнения

Уравнение, при което дясната му страна включва и самото уравнение и имаме начално условие(ия)

$$\text{Пример: } L(n) = \begin{cases} L(n-1)+n, & \text{ако } n \in \mathbb{N}^+ \\ 1, & \text{ако } n = 0 \end{cases}$$

7.1 Алгоритъм за решаване на линейно рекурентно уравнение с константни коефициенти и крайна история

$$F_n = \begin{cases} F_{n-1}+F_{n-2}, & \text{ако } n \geq 2 \\ 1, & \text{ако } n = 1 \\ 0, & \text{ако } n = 0 \end{cases} \qquad \text{е такова валидно уравнение}$$

Обаче, следните уравнения не могат да се решат с този метод:

$$T_n = \begin{cases} n \cdot T_{n-1} & \text{ако } n \geq 1 \\ 1, & \text{ако } n = 0 \end{cases} \qquad \text{защото не е с константи коефициенти}$$

$$S_n = \begin{cases} S_{n-1}+S_{n-2}+...+S_1+S_0, & \text{ако } n \geq 1 \\ 1, & \text{ако } n = 0 \end{cases} \qquad \text{защото не е с крайна история}$$

За илюстриране на метода, нека да разгледаме $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$

1. *Характеристично уравнение*
   Заместваме a_n с x^n, a_{n-1} с x^{n-1} и так. нат. $\quad x^n = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + ... + c_k x^{n-k}$
   След това, делим всичко на $x^{(n-k)}$ $\quad x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + ... + c_k$
   Алтернативно, може да се запише и като $\quad x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - ... - c_k = 0$

2. *Общо решение*
   Намираме корените на хар. уравнение. Нека те да са мултимножеството $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}_{\text{M}}$
   Съставяме уравнението $\quad a_n = A_1 \cdot \alpha_1^n + A_2 \cdot \alpha_2^n + ... + A_k \cdot \alpha_k^n$

   Ако имаме еднакви корени, умножаваме с n^r, където $r \in \mathbb{N}$ е r-тия повтарящ се корен.
   Тоест, ако да имаме 5 корена, за които $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq \alpha_4 \neq \alpha_5$, ще изглежда така:

$$a_n = A_1 \alpha_1^n \cdot n^0 + A_2 \alpha_2^n \cdot n^1 + A_3 \alpha_3^n \cdot n^2 + A_4 \alpha_4^n + A_5 \alpha_5^n$$

3. *Точно решение* (Само ако началните условия са ни дадени)
   Вземаме първите k на брой начални условия (ако се наложи допълваме, тоест изчисляваме всички стойности до a_k).
   С тях, съставяме система линейни уравнения за $a_1, a_2, a_3, ...$

$$\left| \begin{array}{lcccccccc} a_1 & = & A_1 \cdot \alpha_1^1 & + & A_2 \cdot \alpha_2^1 & + & ... & + & A_k \cdot \alpha_k^1 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_k & = & A_1 \cdot \alpha_1^k & + & A_2 \cdot \alpha_2^k & + & ... & + & A_k \cdot \alpha_k^k \end{array} \right.$$

   Чрез нея, намираме стойностите на $A_1, ..., A_k$ и заместваме в Общото решение

7.2 Решаване на нехомогенно рекурентно уравнение с константни коефициенти и крайна история

Нека $b_1, ..., b_l$ са различни стойности, а $p_1(n), ..., p_l(n)$ са полиноми на n. Уравненията са от типа

$$a_n = \underbrace{c_1 a_{n-1} + ... + c_k a_{n-k}}_{\text{хомогенна част}} + \underbrace{p_1(n) \cdot b_1^n + ... + p_l(n) \cdot b_l^n}_{\text{нехомогенна част}}$$

1. *Характеристично уравнение*
   Съставя се като при **7.1**, като просто си представим, че нехомогенната част (тази с $p_l(n)$-вете) не съществува.

2. *Общо решение*
   След като намерим мултимножеството от корени на хомогенната част, разглеждаме нехомогенната. Абстрахираме се от всякакви коефициенти и разглеждаме хомогенната част като сборове от комбинации на $n^g \cdot h^n$.
   Образуваме мултимножеството от корени на нехомогенната част, като добавяме съответните h $g+1$ пъти.

   Пример: $2n^2 + 3^n + 19n^3 7^n$ свеждаме до $n^2 1^n + n^0 3^n + n^3 7^n$
   Корените ни са, три 1-ци, една 3-ка, четири 7-ци: $\{1, 1, 1, 3, 7, 7, 7, 7\}_{\text{M}}$

   Накрая обединяваме двете мултимножества и продължаваме както при **7.1**.

3. *Точно решение*
   Следваме същите стъпки като **7.1**